Ch 2

LES TRIANGLES
les 3 cas d'égalités

Sommaire

0- Objectifs

- Connaître les 3 cas d'égalité des triangles
- Utiliser les 3 cas d'égalité des triangles

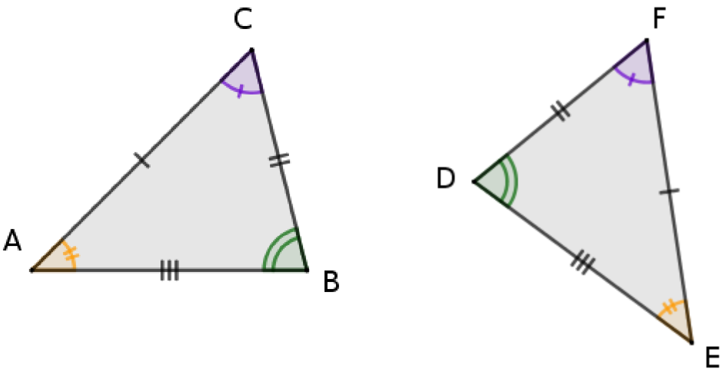
1- Triangles égaux

Définitions :

On dit que 2 triangles sont égaux quand on peut les superposer : les côtés sont égaux 2 à 2 et les angles sont égaux 2 à 2.

Exemples :

Observer les 2 triangles ABC et DEF ci-dessous. Sont-ils égaux ?



associer AC et ABC, ainsi que EF et EDF. De même avec les deux autres égalités.

D'après les codages, AB = DE, BC = DF et AC = EF,
de même, $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$, $\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EDF}$
donc ABC et DEF ont leurs côtés et leurs angles égaux 2 à 2 : les 2 triangles ABC et DEF sont égaux.

Pour montrer que 2 triangles sont égaux, il n'est pas nécessaire de montrer que les 3 égalités sur les côtés et les 3 égalités sur les angles sont vérifiées, on peut se restreindre à vérifier uniquement 3 égalités sur les 6 possibles : on obtient les 3 cas d'égalités :

- 1 angle et les 2 côtés de cet angle
- 1 côté et les 2 angles de ce côté
- 3 côtés

Rappel :

Pour tout triangle, la somme des 3 angles est égale à 180°.

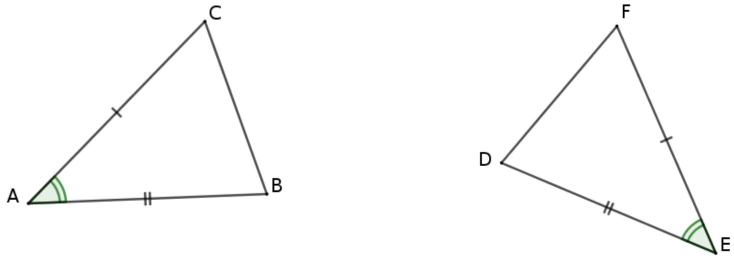
2- 1er cas d'égalité de 2 triangles

Cas d'égalité CAC :

Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux 2 à 2 alors ces deux triangles sont égaux.

Exemple :

Soit les triangles ABC et DEF ci-dessous. Sont-ils égaux ?
Quelles égalités peut-on en déduire ?



D'après le codage, $\widehat{CAB} = \widehat{DEF}$ avec des côtés égaux BA = DE et CA = FE ainsi, les deux triangles ABC et DEF ont un angle égal compris entre des côtés égaux 2 à 2
donc, d'après le cas d'égalité CAC, les deux triangles ABC et DEF sont égaux.

En conséquence, on obtient 3 autres égalités :
$\widehat{CAB} = \widehat{DEF}$ donc CB = DF
BA = DE donc $\widehat{BCA} = \widehat{DFE}$
et CA = FE donc $\widehat{CBA} = \widehat{FDE}$.

Remarque :

Lorsque deux triangles sont égaux, les côtés opposés à des angles égaux sont égaux et inversement.

Dans l'exemple ci-dessus, $\widehat{CAB} = \widehat{DEF}$ correspond à CB = DF.
Inversement, BA = DE correspond à $\widehat{BCA} = \widehat{DFE}$
et CA = FE correspond à $\widehat{CBA} = \widehat{FDE}$.

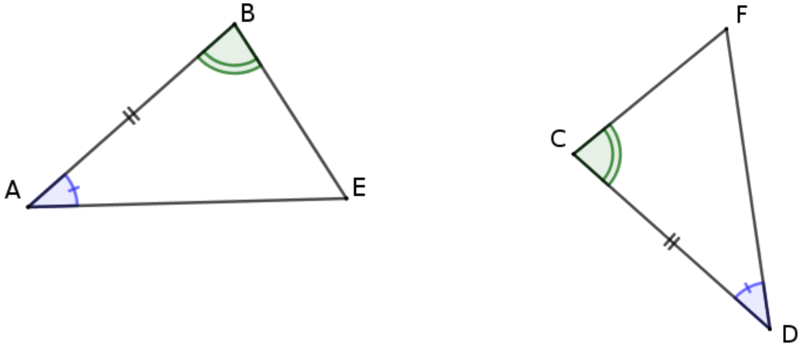
3- 2^{e} cas d'égalité de 2 triangles

Cas d'égalité ACA :

Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles égaux 2 à 2 alors ces deux triangles sont égaux.

Exemple :

Soit les triangles ABE et CDF ci-dessous. Sont-ils égaux ?
Quelles égalités peut-on en déduire ?



D'après le codage, BA = CD

compris entre les angles égaux $\widehat{BAE} = \widehat{CDF}$ et $\widehat{ABE} = \widehat{DCF}$

Ainsi, les deux triangles ABE et CDF ont un côté égal compris entre deux angles égaux 2 à 2

donc, d'après le cas d'égalité ACA, les deux triangles ABE et CDF sont égaux.

En conséquence, on obtient 3 autres égalités :

BA = CD donc $\widehat{BEA} = \widehat{CFD}$

$\widehat{BAE} = \widehat{CDF}$ donc BE = CF

et $\widehat{ABE} = \widehat{DCF}$ donc AE = DF.

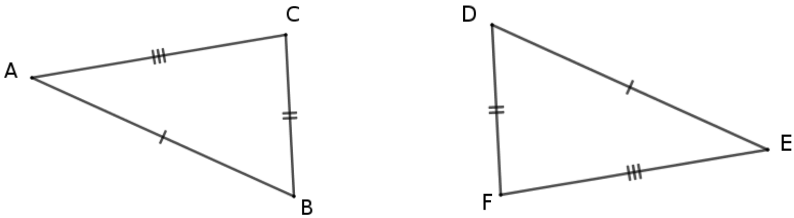
4- 3^{e} cas d'égalité de 2 triangles

Cas d'égalité CCC :

Si deux triangles ont leurs 3 côtés égaux 2 à 2
alors ces deux triangles sont égaux.

Exemple :

Soit les triangles ABC et DEF ci-dessous. Sont-ils égaux ?
Quelles égalités peut-on en déduire ?

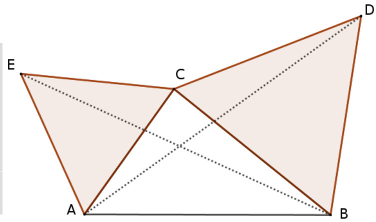


D'après le codage, AB = DE, AC = FE et BC = DF
donc les triangles ABC et DEF ont leurs 3 côtés égaux 2 à 2
donc, d'après le cas d'égalité CCC, les triangles ABC et DEF sont égaux

En conséquence, on a aussi des égalités pour les angles :
$\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$.
qui sont à associer aux 3 égalités AB = DE, AC = FE et BC = DF.

5- Exemples d'utilisation

Exemple 1 :



Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, CBD et ACE sont deux triangles équilatéraux extérieurs au triangle ABC.

Démontrer que EB = AD.

Considérons les triangles ECB et ACD.

D'une part, $\widehat{ECB} = \widehat{ECA} + \widehat{ACB}$ et d'autre part $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$

Or, EAC et BCD sont équilatéraux donc $\widehat{ECA} = \widehat{BCD} = 60°$

donc $\widehat{ECB} = \widehat{ACD}$

EAC équilatéral donc EC = AC

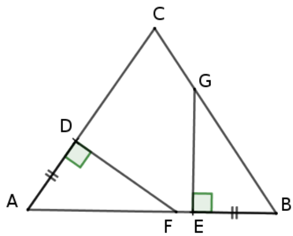
BCD équilatéral donc BC = CD

Ainsi, les deux triangles ECB et ACD ont un angle égal compris entre des côtés égaux 2 à 2

donc, d'après le cas d'égalité CAC, ECB et ACD sont égaux

Or, $\widehat{ECB} = \widehat{ACD}$ donc EB = AD.

Exemple 2 :



Dans la figure ci-contre, ABC est isocèle en C.

Démontrer que AF = GB et DF = EG.

ABC est isocèle en C donc $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$

or, d'une part, D ∈ [AC] et F ∈ [AB] donc $\widehat{CAB} = \widehat{DAF}$

et d'autre part, E ∈ [AB] et G ∈ [BC] donc $\widehat{CBA} = \widehat{GBE}$

donc $\widehat{DAF} = \widehat{GBE}$

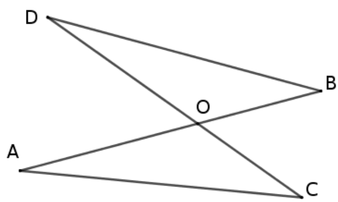
et par ailleurs, d'après le codage, AD = EB, $\widehat{ADF} = 90°$ et $\widehat{BEG} = 90°$ donc $\widehat{ADF} = \widehat{BEG}$

Ainsi, les deux triangles ADF et EBG ont un côté égal compris entre deux angles égaux 2 à 2

donc, d'après le cas d'égalité ACA, les triangles ADF et BEG sont égaux.

En conséquence, AF = BG car $\widehat{ADF} = \widehat{BEG}$ et DF = GE car $\widehat{DAF} = \widehat{GBE}$.

Exemple 3 :



Dans la figure ci-contre, DB = AC et AB = CD.

Démontrer que OB = OC.

On a DB = AC et AB = CD

donc les triangles BCD et BCA ont leurs 3 côtés égaux 2 à 2

donc, d'après le cas d'égalité CCC, les triangles BCD et BCA sont égaux

donc $\widehat{DCB} = \widehat{ABC}$ car DB = AC ; or O ∈ [DC] et O ∈ [AB] donc $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

donc OBC est isocèle en O donc OB = OC.