Ch 11

TRIANGLES SEMBLABLES

Sommaire

0- Objectifs

- Reconnaître que 2 triangles sont semblables
- Savoir que 2 triangles semblables ont des côtés proportionnels
- Utiliser des triangles semblables pour calculer des longueurs

1- Triangles et angles égaux

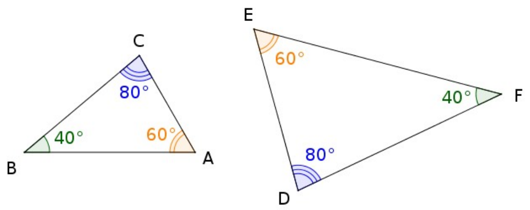
Définition :

Lorsque deux triangles ont leurs angles égaux 2 à 2, on dit que ces deux triangles sont semblables.

Les angles égaux sont dits homologues

Les côtés opposés à des angles égaux sont dits homologues

Exemple 1 :



→ ABC et EDF sont 2 triangles semblables

→ $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DEF}$ sont 2 angles égaux

→ [BC] et [DF] sont 2 côtés homologues

Exemple 2 :

• Soit ABC et DEF deux triangles tels que $\widehat{ABC} = 40°$, $\widehat{BAC} = 30°$, $\widehat{FED} = 30°$ et = $\widehat{EFD}$ 110°. Que peut-on dire de ces deux triangles ?

On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Pour le triangle ABC, $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC}) = 180° - (40° + 30°) = 180° - 70° = 110°$

Pour le triangle DEF, $\widehat{EDF} = 180° - (\widehat{FED} + \widehat{EFD}) = 180° - (30° + 110°) = 180° - 140° = 40°$

Ainsi les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux 2 à 2

donc ABC et DEF sont des angles semblables.

Exemple 3 :

• Soit ABC et DEF deux triangles semblables tels que $\widehat{ABC} = 50°$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{FED} = 70°$ et $\widehat{EDF} < \widehat{EFD}$.

Que peut-on dire des angles de ces deux triangles ?

On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Pour le triangle ABC, $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC}) = 180° - (50° + 60°) = 180° - 110° = 70°$

Ainsi, $\widehat{FED} = 70°$ et $\widehat{ACB} = 70°$ donc $\widehat{FED} = \widehat{ACB}$

Les triangles ABC et DEF étant semblables, leurs angles sont égaux 2 à 2

on peut donc avoir l'une de ces situations :

→ $\widehat{EFD} = \widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{EDF} = \widehat{BAC} = 60°$ → $\widehat{EDF} = \widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{EFD} = \widehat{BAC} = 60°$

Or, $\widehat{EDF} < \widehat{EFD}$, ce qui correspond à la 2^{e} situation donc $\widehat{EDF} = 50°$ et $\widehat{EFD} = 60°$.

2- Proportionnalité des côtés homologues

Propriété :

Si deux triangles sont semblables alors ces deux triangles ont leurs côtés homologues proportionnels.

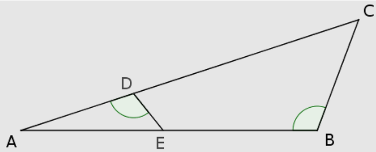
Réciproquement, si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ces deux triangles sont semblables.

Exemple 1 :

• Dans la figure ci-contre, on a AB = 5 cm, AC = 6 cm, BC = AD =2 cm et $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.

1) Que peut-on dire des triangles ABC et ADE ?

2) En déduire les valeurs de AE et DE.



1) D'une part, d'après l'énoncé, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

et, d'autre part, d'après la figure, D est sur [AC] et E est sur [AB] donc $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$.

Par ailleurs, on sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°

donc, pour le triangle ADE, $\widehat{AED} = 180° - (\widehat{ADE} + \widehat{EAD})$

et pour le triangle ABC, $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC})$

or, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ donc $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

ainsi, les triangles ABC et ADE, ayant leurs angles égaux 2 à 2, sont des triangles semblables.

2) ABC et ADE étant semblables, il en résulte que leurs côtés homologues sont proportionnels.

On a donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$ donc $\dfrac{5\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \dfrac{2\text{ cm}}{DE} = \dfrac{6\text{ cm}}{AE}$

ce qui donne : DE = $\dfrac{2\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{4}{5}$ cm = 0,8 cm et AE = $\dfrac{6\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{12}{5}$ cm = 2,4 cm

Exemple 2 :

ABC est tel que AB = 5 mc, BC = 6 cm et CA = 7 cm

DEF est tel que DE = 10,5 cm, EF = 7,5 cm et FD = 9 cm

Démontrer que ABC et DEF sont semblables.

Calculons les 3 quotients :

$$\frac{DE}{CA} = \frac{10{,}5\text{ cm}}{7\text{ cm}} = \frac{105}{70} = \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{7{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{75}{50} = \frac{3 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{FD}{BC} = \frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$$

donc les 3 quotients sont égaux : $\dfrac{DE}{CA} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{FD}{BC}$

donc ABC et DEF ont leurs côtés proportionnels

et donc ABC et DEF sont semblables.

On a donc : $\widehat{DFE} = \widehat{CBA}$, $\widehat{EDF} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{FED} = \widehat{BAC}$.