Chapitre 12 Fonctions affines

1. Fonction affine

Activité d'introduction

Définition : Soient a et b deux nombres données.
Une fonction affine f est une fonction, qui a un nombre x, associe le nombre a x + b.
f : $x \mapsto ax + b$

Vocabulaire :
- a est appelé coefficient directeur et
- b est appelé ordonnée à l'origine.

Exemple : Soit f une fonction définie par f : $x \mapsto -2x + 5$.

a. Quelle est la nature de f ?
b. Calculer l'image de -3 par f.
c. Déterminer l'antécédent de 2 par f.

→ a. f étant de la forme a x + b, avec a= -2 et b= 5, f est donc la fonction affine de coefficient directeur -2 et d'ordonnée à l'origine 5.
b. f(−3) = -2 × (−3) + 5 = 6 + 5 = 11 l'image de -3 par f est 11.
c. On cherche x tel que f(x) = 2 donc tel que -2 x + 5 = 2 d'où -2 x = 2 - 5 donc -2 x = -3 ; donc x = -3 ÷ (-2) = 1,5 donc 1,5 est l'antécédent de 2 par la fonction f.

Remarque : Soit f une fonction affine tel que f : $x \mapsto ax + b$; on distingue deux cas particuliers :
- Si b = 0, alors f(x) = a x. f est une fonction linéaire.
- Si a = 0, alors f(x) = b. f est une fonction constante.

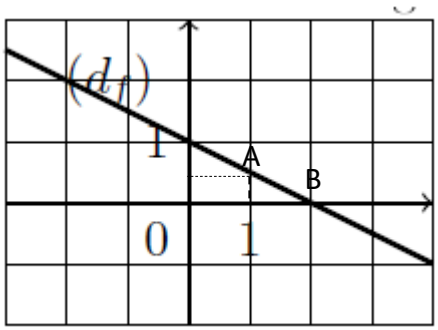
Exercices

2. Représentation graphique

Activité d'introduction

Propriété (admise) : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine f telle que f : $x \mapsto ax + b$ est une droite constituée de tous les points de coordonnées (x ; a x + b).
Cette droite passe en particulier par le point de coordonnées (0 ; b).

Exemple 1 : Représenter graphiquement la fonction affine f définie par f : $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$.



→ f est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite. Pour tracer cette droite, il suffit de calculer les coordonnées de deux points.
f(1) = $\frac{1}{2}$ donne un point A (1 ; $\frac{1}{2}$),
f(0) = 2 donne un point B (0 ; 2).
La droite (d_f) passant par les points A et B est la représentation graphique de f.

Exercices

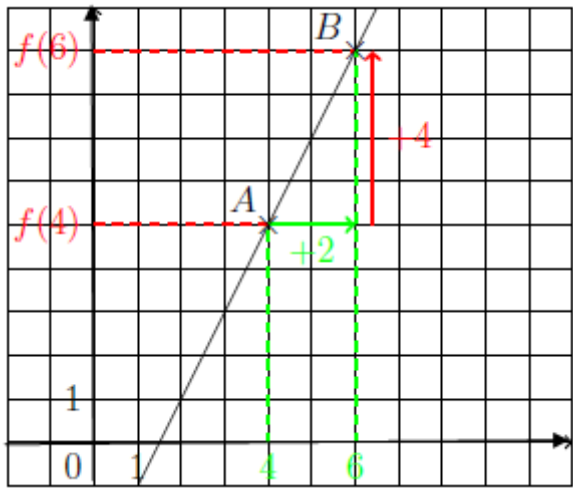
3. Déterminer l'expression d'une fonction affine

Activité d'introduction

Propriété (admise) (proportionnalité des accroissements): Soit f une fonction affine telle que f : $x \mapsto ax + b$, avec a et b deux nombres donnés.

Pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, on a : $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Exemple 1 (à partir de deux points et leurs images): Soit f une fonction affine telle que : f(4) = 5 et f(6) = 9. Déterminer l'expression algébrique de f.



→ On sait que f est une fonction affine donc son expression algébrique est de la forme f(x) = $ax + b$.

Calcul du coefficient directeur a :

D'après la proportionnalité des accroissements, on a :

a = $\frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{9-5}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$

Le coefficient directeur de f est égal à 2.

On peut donc écrire : f(x) = $2x + b$.

Calcul de l'ordonnée à l'origine b :

On a trouvé précédemment que f(x) = $2x + b$ et on sait que f(4) = 5 soit f(4) = $2 \times 4 + b = 8 + b$ = 5

Donc b = 5 – 8 = -3.

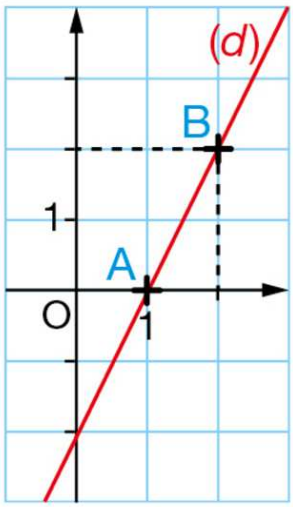
L'ordonnée à l'origine est égale à -3. Donc on peut écrire f(x) = $2x - 3$.

On vérifie par le calcul que f(6) = 9.

f(6) = $2 \times 6 - 3 = 12 - 3$ = 9

Conclusion : L'expression algébrique de f est f(x) = $2x - 3$

Exemple 2 (à partir d'un graphique) : La droite (d) est la représentation graphique d'une fonction affine g. Déterminer l'expression algébrique de g.



→ On sait que g est une fonction affine donc son expression algébrique est de la forme g(x) = $ax + b$.

Coefficient directeur a : Graphiquement, on part du point A, on avance horizontalement d'une unité vers la droite puis on monte verticalement de 2 unités pour arriver au point B donc a = $\frac{2}{1}$ = 2.

Autre méthode : La droite représentant g passe par les points A(1 ; 0) et B(2 ; 2), d'après la proportionnalité des accroissements on a :

a = $\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = \frac{2-0}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

Le coefficient directeur a est égal à 2.

Ordonnée à l'origine b : Graphiquement, on voit que pour x = 0, on a : g(0) = -2 ; donc l'ordonnée à l'oirigine b est égale à -2.

Conclusion : L'expression algébrique de g est g(x) = $2x - 2$.

Exercices