Chapitre 11 Proportionnalité

1. Proportionnalité et égalité des produits en croix

Activité d'introduction

Définition (rappel): Un tableau (à deux lignes) est appelé tableau de proportionnalité, lorsque tous les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant tous ceux de la première ligne par un même nombre. Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple : Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Nombre de macarons	6	10	15
Prix (en €)	8,4	14	21

Durée de location (en h)	2	5
Prix (en €)	17	38

→ Premier tableau : On calcule les quotients : $\frac{8,4}{6} = 1,4$; $\frac{14}{10} = 1,4$; $\frac{21}{15} = 1,4$.

Tous les quotients sont égaux donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est 1,4.

Deuxième tableau : On calcule les quotients : $\frac{17}{2} = 8,5$; $\frac{38}{5} = 7,6$. Les quotients ne sont pas égaux, donc le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Propriété (admise) : Soient a, b, c et d quatre nombres.

Si un tableau

a	b
c	d

représente une situation de proportionnalité alors $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Et on peut écrire l'égalité des produits en croix : b × c = a × d.

Exemple : Calculer la quatrième proportionnelle du tableau de proportionnalité ci-dessous

2	3
17	x

→ On utilise l'égalité des produits en croix : 2 × x = 17 × 3 donc 2 x = 51 donc $x = 25,5$.

Exercices

2. Représentation graphique

Activité d'introduction

Propriété (admise) : Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.

Propriété (admise): Tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère représente une situation de proportionnalité.

Exercices

3. Pourcentages

Propriété (admise) : Pour appliquer un pourcentage P% à un nombre on multiplie ce nombre par la fraction $\frac{P}{100}$.

Exemple : 60% d'une classe de 25 élèves pratiquent un sport. Combien d'élèves pratiquent un sport?

1ère méthode : $25 \times \frac{60}{100} = 15$ Il y a donc 15 élèves qui pratiquent un sport.

2ème méthode (avec un tableau de proportionnalité) :

60	1500
100	25

60×25 = 1500

1500÷100 = 15 Il y a donc 15 élèves qui pratiquent un sport.

Calculer un pourcentage (rappel) : Pour déterminer un pourcentage on peut utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemple : Farah a obtenu une baisse de 58 euros sur un appareil photo affiché à 200 €. Quel pourcentage de réduction a-t-elle obtenu ?

→ À l'aide d'un tableau de proportionnalité :

Remise (€)	58	p
Prix(€)	200	100

On note p le pourcentage de réduction. D'après l'égalité des produits en croix on a :

200 x p = 100 x 58 donc 2p = 5800 donc p = 5800 ÷ 200 = 29

La réduction est donc de 29%.

Exercices

4. Grandeur produit et grandeurs quotient

Activité d'introduction

Définitions : Une grandeur produit est une grandeur obtenue en faisant le produit de deux grandeurs.
Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en faisant le quotient de deux grandeurs.

Exemple 1 : Pour chaque grandeur précise s'il s'agit d'une grandeur produit ou d'une grandeur quotient : aire, vitesse moyenne, débit d'un robinet, volume, masse volumique, densité de population.

Grandeur produit	Grandeur quotient
Aire (longueur × longueur) Volume (aire × longueur)	Vitesse moyenne ($\frac{distance}{durée}$) Débit d'un robinet ($\frac{volume}{durée}$) Masse volumique ($\frac{masse}{volume}$) Densité de population ($\frac{Nombre\ d'habitants}{surface}$)

Exemple 2 : Un radiateur d'une puissance de 800W fonctionne pendant 2h, quelle est l'énergie consommé par cet appareil ?
→ E = 800W × 2h = 1600 Wh. En 2h le radiateur consomme 1600 Wh soit 1,6 kWh (kilowatts-heures)

Exemple 3 : Une fontaine a un débit de 20 L/min.
Détermine le volume d'eau qui s'écoule en : a. 3 min b. 1h
En combien de temps obtiendra-t-on : c. 80 L d. 500 L ?
1ère méthode :
→ Le volume d'eau écoulé est proportionnel au temps. On peut donc utiliser un tableau de proportionnalité.

Volume (L)	20	60	1200	80	500
Temps (min)	1	3	60 (=1h)	4	25

2ème méthode : on utilise la formule Débit = $\frac{volume}{temps}$

Pour trouver le volume on multiplie le temps par le débit et pour trouver le temps on divise le volume par le débit.

a) Volume = 3 min × 20 L/min = 60 L En 3 minutes il s'écoule 60 litres d'eau.
b) Volume = 60 min × 20 L/min = 1200 L. En une heure il s'écoule 1200 litres d'eau.
c) Temps = 80 L ÷ 20 L/min = 4 min. On obtient 80 L en 4 minutes
d) Temps = 500 L ÷ 20 L/min = 25 min. On obtient 80 L en 4 minutes

<u>Remarque :</u> La grandeur obtenue en faisant le quotient de deux grandeurs de même unité est sans unité. Ainsi, sur une carte, si 1 cm représente 10 m, l'échelle vaut :

$$\frac{1\ cm}{10\ m} = \frac{1\ cm}{1000\ cm} = \frac{1}{1000}.$$

Exercices