7. Calcul littéral

1. Réduction d'une expression littérale

Activité d'introduction :

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales ?

$6x$	$5,5x$	$6x^2$
$1,5x \times 4x$	$1,5x + 4x$	$5,5x^2$

Solution :
$1,5x \times 4x = 6x^2$ et $1,5x + 4x = 5,5x$.

Activité d'introduction n°2 :

Théo affirme :"$a - (b + c) = a - b + c$" mais Lisa dit : "$a - (b + c) = a - b - c$". Qui a raison ?

Solution :
C'est Lisa qui a raison. On peut tester avec des valeurs numériques.

Vocabulaire

Réduire une expression littérale signifie écrire cette expression sous une forme plus simple (avec le moins de termes et de facteurs possible).

Exemple : Réduis les expressions suivantes.

1. $7a + 5a$
2. $2x \times 3x$
3. $5x \times 4y$

Solution :

1. $7a + 5a = 12a$
2. $2x \times 3x = 6x^2$
3. $5x \times 4y = 20xy$

Remarque (règles d'écriture) :

— On peut ne pas écrire le symbole "$\times$" entre deux lettres, entre un nombre et une lettre ou devant une parenthèse. Le symbole "$\times$" est le seul qu'on peut ne pas écrire.

— Pour tous a et b deux nombres relatifs, on a les égalités suivantes :

$$(-x) \times y = x \times (-y) = -xy \text{ et } (-x) \times (-y) = x \times y = xy$$

Propriété (admise)

Si on supprime une parenthèse précédée d'un signe $+$, alors on ne change pas les signes des termes dans la parenthèse.

Exemple : Réduis l'expression $7 + (3a - 5)$.

Solution :
$7 + (3a - 5) = 7 + 3a - 5 = 3a + 2$

Propriété (admise)

Si on supprime une parenthèse précédée d'un signe $-$, alors on change tous les signes des termes dans la parenthèse.

Exemple : Réduis l'expression $12 - (-5 + 4a)$.

Solution :
$12 - (-5 + 4a) = 12 + 5 - 4a = -4a + 17$

Bilan

Si l'expression à réduire est un produit,
- on multiplie les nombres entre eux ;
- on multiplie les variables entre elles (en utilisant éventuellement des puissances).

Exemple : Réduis les expressions suivantes.
1. $2x \times 4x$
2. $3a \times 7a^2$

Solution :
1. $8x^2$
2. $21a^3$

Si l'expression à réduire est une somme ou une différence,
- on souligne les termes qui ont la même variable et le même exposant ;
- on conserve la variable et l'exposant et on additionne (ou on soustrait) les nombres devant ces variables.
- on additionne les nombres seuls entre eux.

Exemple : Réduis l'expression suivante.
$3y^2 - 2y + 5 - 7y + 3 - 4y^2$

Solution :
$\boxed{3y^2}\ \underline{-2y} + ⑤\underline{-7y} + ③\ \boxed{-4y^2}$
$= -y^2 - 9y + 8$

Remarque : Pour réduire une expression, il faut toujours commencer par supprimer les éventuelles parenthèses.

Exercices

2. Développement d'une expression littérale

Activité d'introduction : Transmath 4ème p 39 activité 1 n°1

A la rentrée, le gestionnaire d'un club de football junior achète un short à 17,90€ et un maillot à 39,90€ pour chacun des 11 joueurs d'une équipe.
Calcule de deux façons différentes le montant de la dépense.

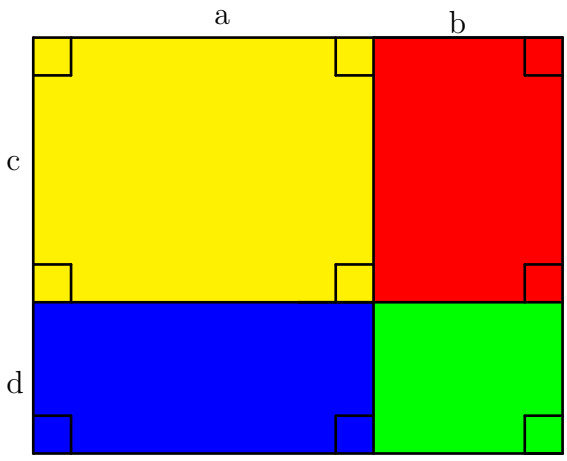
Solution :

$$\begin{aligned} P &= 11 \times 17,90 + 11 \times 39,90 \\ &= 196,90 + 438,90 \\ &= 635,80€ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 11 \times (17,90 + 39,90) \\ &= 11 \times 57,80 \\ &= 635,80€ \end{aligned}$$

Activité d'introduction n°2 :

Les lettres a, b, c et d désignent des nombres positifs.



1. Écris l'aire du grand rectangle ci-dessus sous la forme d'un produit.
2. Écris l'aire du grand rectangle ci-dessus sous la forme d'une somme.
3. Quelle égalité peux-tu déduire des deux questions précédentes ?

Solution :

1. $Aire = (a+b) \times (c+d)$.
2. $Aire = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.
3. $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.

Définition

Développer signifie transformer un produit en somme ou en différence.

Propriété (admise)

Pour tous nombres relatifs a, b et k, on a

$$k(a+b) = ka + kb.$$

Exemple : Développe les expressions suivantes :

Forme produit	Forme développée
A = 6(4x + 8)	A = 24x + 48
B = 5(9-3y)	B = 45 - 15y
C = -3(5z- 4)	C = -15z + 12

Propriété (admise)

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a

$$(a+b)(c+d) = ab + ac + bc + bd.$$

Exemple : Développe et réduis $A = (x+5)(2x+1)$.

$$\begin{aligned} A &= x \times 2x + x \times 1 + 5 \times 2x + 5 \times 1 \\ &= 2x^2 + x + 10x + 5 \\ &= 2x^2 + 11x + 5 \end{aligned}$$

Exercices

3. Factorisation d'une expression littérale

Activité d'introduction :

En lisant le chapitre "calcul littéral" du cours de mathématiques, Justine se rend compte qu'il existe des règles similaires en mathématiques et en français. En effet, on peut dire "Lucie nage et court" ou "Lucie nage et Lucie court". On a développé le sujet.
Cela fonctionne aussi dans l'autre sens. On peut dire "Jean chante et Mike chante" ou bien "Jean et Mike chantent". On a factorisé le sujet.

1. Factorise les phrases suivantes.
   (a) Les serpents sont des reptiles, les serpents sont recouverts d'écailles, les serpents peuvent être de toutes les couleurs.
   (b) Au feu rouge, la voiture s'arrête, la moto s'arrête, le vélo s'arrête.
2. Factorise les expressions suivantes.
   (a) $12 \times 7 + 12 \times 9$
   (b) $5 \times 3,2 - 5 \times 2,1$
   (c) $x \times y + x \times z$

Solution :

1. (a) Les serpents sont des reptiles, sont recouverts d'écailles, peuvent être de toutes les couleurs.
   (b) Au feu rouge, la voiture, la moto, le vélo s'arrêtent.
2. Factorise les expressions suivantes.
   (a) $12 \times (7 + 9)$
   (b) $5 \times (3,2 - 2,1)$
   (c) $x \times (y + z)$

Vocabulaire

Factoriser signifie transformer une somme ou une différence en un produit.

Exemple : Factorise l'expression $2x^2 - 3x$.

Solution :

$$2x^2 - 3x = 2 \times x \times \underline{x} - 3 \times \underline{x}$$
$$= x \times (2x - 3)$$

$$\underbrace{2x^2 - 3x}_{\text{forme développée}} = \underbrace{x \times (2x - 3)}_{\text{forme factorisée}}$$

Propriété (admise)

Pour tous nombres relatifs a, b et k, on a

$$ka + kb = k(a + b).$$

Remarque : On dit que k est un facteur commun aux termes ka et kb.

Exemple : Factorise les expressions suivantes.

1. $A = 2x + 3x^2$
2. $B = 6x - 12$
3. $C = 5x - x$

Solution :

1. $A = x(2 + 3x)$
2. $B = 6(x - 2)$
3. $C = x(5 - 1)$

Exercices